ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия

Определение. Рядом называется выражение вида

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$**, где числа** $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ **(1)**

называются членами ряда. Величина a_n – общий или n-й член ряда.

Члены ряда образуют бесконечную последовательность.

Члены ряда могут обозначать числа, функции, векторы, матрицы и т.п.

Очень часто ряд записывается в сокращенной форме:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Многоточие в конце записи указывает на то, что в выражении (1) нет последнего слагаемого. Таким образом, ряд есть «бесконечная» сумма.

Определение. Ряд, все члены которого являются числами, называется числовым.

Примеры числовых рядов:

а) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$,

б) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$.

Ряд считается заданным, если известен его общий член $a_n = f(n)$ $n = 1,\ 2,\ \ldots$, т. е. задана функция $f(n)$ натурального аргумента.

Пример. Ряд с общим членом $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$ имеет вид

$$\frac{1}{1^2\cdot 2} - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)} + \ldots.$$

Более сложной является задача: по нескольким первым членам ряда составить общий член ряда.

Пример. Найти общий член ряда: $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{13} + \ldots$.

Решение. Заметим закономерности для числителей и знаменателей дробей. Числа 2, 4, 6, … отличаются друг от друга на величину $d = 2$, т. е. эти числа образуют арифметическую прогрессию с $a_1 = 2,\ \ d = 2$. Тогда величину a_n определим как общий член арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Получим $a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. Аналогично, числа 5, 9, 13, … образуют арифметическую прогрессию со значениями $a_1 = 5,\ \ d = 4$. Получим $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n+1$.

В результате для ряда $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{13} + \ldots$ общий член ряда

$$a_n = \frac{2n}{4n+1}.$$

Сумма конечного числа n первых членов ряда (1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ называется n **-й частичной суммой** данного ряда.

Определение. Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при неограниченном возрастании n имеет конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (2)$$

Этот предел называется **суммой сходящегося ряда**. Если предел не существует или бесконечен, то ряд называется **расходящимся**.

Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со значениями b_1 и q:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$$

называется **геометрическим рядом**, где $q \neq 0, |q| \neq 1$.

Геометрический ряд сходится при величине $|q| < 1$ и расходится при величине $|q| > 1$.

Свойства сходящихся рядов

1. **Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится и имеет сумму S, то и ряд $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots$ (полученный умножением данного ряда на число λ) также сходится и имеет сумму λS.**

2. **Если ряды** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ **и** $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ **сходятся и имеют суммы соответственно** S_a **и** S_b**, то ряды:**

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \quad (3)$$

и ряд $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$ **(4)**

также сходятся, а их сумма и разность равна соответственно $S_a + S_b$ **и** $S_a - S_b$**.**

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

4. **Если ряд** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ **сходится, то сходится и ряд** $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$**, полученный отбрасыванием** n **первых членов ряда. Верно и обратное.**

Определение. Ряд $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называется n **-м остатком ряда** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

5. **Если ряд (1) сходится, то** $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0.$

6. Над сходящимися рядами можно выполнять арифметические действия: сложение, вычитание, умножение, деление. Они выполняются как действия над многочленами.

2. Необходимый признак сходимости ряда (теорема).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится, то его общий член** a_n **при неограниченном увеличении номера** n **стремится к нулю:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (5)$$

Замечание. Это условие является необходимым, но не достаточным признаком сходимости, то есть из стремления общего члена ряда к нулю не обязательно следует сходимость ряда.

Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ служит примером ряда, у которого предел общего члена $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, а сам этот ряд **расходится**

Достаточный признак расходимости ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$**, то ряд расходится.**

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{3n-1}+\cdots$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$, не равен 0, то ряд расходится.

Выявление сходимости рядов необходимо для того, чтобы выполнять действия над рядами. Только над сходящимися рядами можно выполнять определенные действия.

3. Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Определение. Ряд называется знакоположительным, если все его члены положительны, т. е. $a_i > 0$.

3.1. Первый признак сравнения

Даны два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (6)$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (7)$$

так, что $u_n \le v_n$ **, т. е. каждый член (6)-го ряда не превосходит соответствующего члена (7)-го ряда. Тогда, если сходится ряд (7), то сходится ряд (6); если расходится ряд (6), то расходится и ряд (7).**

Следствие. Условие $u_n \le v_n$ может выполняться начиная не обязательно с n=1. Утверждение теоремы справедливо, если это условие выполняется для всех n, больших некоторого N.

Замечания.

1. На остальные случаи признак сравнения ответа о сходимости ряда не даёт.

2. Этим признаком пользуются, сравнивая данный ряд с рядом сравнения, сходимость которого известна.

Рядами для сравнения являются:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in R$ – обобщенный гармонический ряд;

– при значении $p=1$ получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится;

– при значении $p>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ называется рядом Дирихле. Этот ряд сходится при значении $p>1$ и расходится при значении $0<p\le 1$;

– при значении $p<0$ ряд расходится;

б) $\sum b_1 q^{n-1}$ – геометрический ряд;

– при значении $0<|q|<1$ ряд **сходится**, при этом его сумма $S=\frac{b_1}{1-q}$;

– при значении $|q|>1$ ряд **расходится.**

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots \qquad (1)$$

$u_1=\frac{1}{\ln 2}$; $u_2=\frac{1}{\ln 3}$; $u_3=\frac{1}{\ln 4}$;

Будем сравнивать его с рядом, полученным из гармонического отбрасыванием первого члена

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots \qquad (2)$$

$$v_1=\frac{1}{2};\ v_2=\frac{1}{3};\ v_3=\frac{1}{4};\ \dots$$

Имеем $\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{2};\ \frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{3};\ \frac{1}{\ln 4}>\frac{1}{4};\ \dots$, т. е. $u_i>v_i$.

Так как ряд(2) расходится, а члены ряда(1) больше членов ряда(2), то ряд(1) – расходится.

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий «эталонный ряд», но и доказать неравенство $u_n \le v_n$, для чего часто требуется преобразование рядов (например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определенные числа и т. п.). В ряде случаев более простым оказывается предельный признак сравнения.

3.2. Второй признак сравнения (предельный признак)

Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$, то ряды одновременно сходятся либо расходятся.

Следствие. При применении 2-го признака сравнения удобно брать в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

3.3. Признак Даламбера

Пусть для ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ существует *предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L.$$

Тогда этот ряд сходится при значении $L < 1$ и расходится при значении $L > 1$. При значении *L=1* вопрос о сходимости ряда остается открытым, поэтому необходим другой признак.

Пример. Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

3.4. Радикальный признак Коши

Если для ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, то при значении $L < 1$ ряд сходится, при значении $L > 1$ – расходится.

Так же, как в признаке Даламбера, $L = 1$ не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример. Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

3.5. Интегральный признак Коши

Если функция $y=f(x)$ непрерывна, монотонно убывающая при значении $x\geq 1$ и такая, что $f(n)=a_n$ при значении $n\in N$, где a_n – члены ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, то данный ряд сходится или расходится, в зависимости от сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Например, обобщённый гармонический ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ \ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$, потому что $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

4. Знакочередующиеся ряды

Определение. Если два стоящих рядом члена ряда имеют разные знаки, то ряд называется знакочередующимся. Его вид:

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots.$$

Вопрос о сходимости знакочередующегося ряда решается с помощью следующего признака.

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда $a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots$ удовлетворяют условиям:

1) $a_n\geq a_{n+1}$, $\forall n\in N$, т. е. члены ряда не возрастают (убывают) по абсолютной величине;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, **то данный ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена ряда, т. е.** $S \le a_1$.

Пример. Ряд *1*- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ сходится, т. к.

1) 1…;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Замечание. Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой его нескольких первых членов. Допускаемая при этом **погрешность** оценивается для знакочередующегося ряда по признаку Лейбница.

Следствие. Погрешность суммы сходящегося знакочередующегося ряда при приближенном вычислении по абсолютной величине меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда:

$\delta < |a_{n+1}|$.

5. Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда

Определение 1. Если члены числового ряда имеют различные знаки, то ряд называется знакопеременным.

Рассмотрим знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (8)$$

у которого члены a_i различных знаков.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (8) вида

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \qquad (9)$$

Определение 2. Знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ **называется абсолютно сходящимся, если сам ряд сходится и ряд**

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\cdots$, **составленный из абсолютных величин членов ряда тоже сходится.**

Пример. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ - абсолютно сходится.

Определение 3. Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ - условно сходящийся, т. к. сам ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ –расходится как гармонический ряд.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают различными свойствами.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости.

2. Если $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ **и** $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ **– абсолютно сходящиеся ряды с суммами** S_a **и** S_b **соответственно, то ряд:** $(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots(a_n\pm b_n)+\ldots$ **также абсолютно сходящийся, а сумма его равна** $S_a\pm S_b$ **.**

3. Если $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ **и** $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ **– абсолютно сходящиеся ряды с суммами** S_a **и** S_b **соответственно, то ряд** $(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots)\cdot(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots)$ **также абсолютно сходящийся с суммой** $S_a\cdot S_b$ **.**

Свойства условно сходящихся рядов

Перестановка членов условно сходящегося ряда может изменить сумму ряда и даже сделать его расходящимся.

Теорема Римана. При перестановке членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, имеющий заранее заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

5. Функциональные ряды. Степенные ряды

Определение. Ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$ **, членами**

которого являются функции $u_n(x)$**, называется функциональным.**

Функции $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$ определены на некотором множестве X .

Каждому значению $x_0\in X$ соответствует числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, который может быть сходящимся или расходящимся.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ **сходится, то** x_0 **называется точкой сходимости функционального ряда.**

Определение. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его **областью сходимости** D .

Если функциональный ряд сходится в области D , то он имеет сумму $S(x)$ в этой области.

Рассмотрим один из функциональных рядов.

Определение.

Ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

где a_n, x, x_0 – **действительные числа, называется** **степенным рядом по степеням** $(x - x_0)$.

Числа a_0, a_1, a_2, …, a_n, … называются **коэффициентами степенного ряда**.

При значении $x_0 = 0$ получим степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

по степеням x.

Далее будем рассматривать ряды вида (1), т. к. любой другой степенной ряд можно свести к ряду (1) подстановкой $x - x_0 = x'$.

Теорема (Абеля).

Если степенной ряд (1) сходится в точке $x = x_0 \neq 0$**, то он сходится абсолютно в интервале, соответствующем неравенству:** $|x| < x_0$.

Следствие. Если в точке $x_1 \neq 0$ **степенной ряд (1) расходится, то он расходится во всех точках** x **таких, что** $|x| > x$.

Из теоремы Абеля и ее следствия вытекает, что если степенной ряд (1) сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$**, то всегда существует число** $R > 0$ **такое, что степенной ряд сходится абсолютно для всех** $x \in (-R;\ R)$ **и расходится для всех** $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Определение. Величина R называется **радиусом сходимости**, а интервал $(-R;\ R)$ – **интервалом сходимости** ряда (1), $x = 0$ – середина интервала.

Частные случаи:

– если ряд сходится в точке $x = 0$, то $R = 0$; $x = 0$ – точка сходимости;

– если ряд сходится при всех $x \in R$, то $R = \infty$; $(-\infty; \infty)$ – интервал сходимости ряда.

На концах интервала ряд может либо сходиться (абсолютно или условно), либо расходиться. Сходимость ряда при значениях $x = \pm R$ надо исследовать по соответствующему признаку сходимости.

Для нахождения радиуса и интервала сходимости используют признак Даламбера, в редких случаях, радикальный признак Коши.

$\frac{1}{M} = R$ – радиус сходимости, $\left(-\frac{1}{M}; \frac{1}{M}\right)$ – интервал сходимости ряда (1).

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – формула для нахождения радиуса сходимости ряда.

Для определения сходимости ряда на концах интервала в степенной ряд (1) вместо значения x подставляются числа R и $-R$. Получаем два числовых ряда, которые исследуются по известным признакам сходимости.

Замечание. При исследовании на концах интервала сходимости для получающегося ряда с положительными членами применять признак Даламбера не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем получать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ **с нерешенным вопросом о сходимости ряда; в этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости.**

Степенной ряд общего вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

сводится к ряду (1) подстановкой $x - x_0 = x'$. Получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n.$$

Если R – радиус сходимости этого ряда, то ряд сходится абсолютно при значениях $|x| < R$ и расходится при значениях $|x| > R$.

Тогда степенной ряд общего вида сходится абсолютно при значениях $|x - x_0| < R$ и расходится при значениях $|x - x_0| > R$, где R – радиус сходимости,

$(x_0 - R;\ x_0 + R)$ – интервал сходимости, x_0 – середина интервала.

Свойства степенных рядов

Рассмотрим свойства на примере ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

1. Если радиус сходимости степенного ряда (1) отличен от нуля, то его сумма $S(x)$ непрерывна на интервале сходимости $(-R;\ \ R)$.

2. Если радиус сходимости ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом интервал сходимости не изменяется.

3. Внутри интервала сходимости ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, умножать на число. Интервал сходимости должен быть общим для этих рядов.

6. Ряды Тейлора и Маклорена

Определение. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 допускает разложение в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, то

этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(x)$ **в точке** x_0 **и имеет вид:**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (1)$$

При значении $x_0=0$ ряд Тейлора обычно называют **рядом Маклорена**.

В этом случае:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (2)$$

Но не всегда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$**, для которой он составлен.**

Если $S(x)=f(x)$ **в интервале сходимости** $(x_0-R;\ x_0+R)$**, где** $S(x)$ **– сумма ряда Тейлора, то говорят, что функция** $f(x)$ **разложена в ряд Тейлора в окрестности точки** x_0**.**

Так как определять сумму ряда достаточно сложно, то можно использовать следующий признак.

Признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Чтобы ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ **сходился к этой функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора** R_n **стремился к нулю при значении** $n\to\infty$**, т. е.** $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ **для всех значений** x **из интервала сходимости ряда.**

$R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$**, где** $\xi\in(x_0,\ x)$ **– остаточный член в форме Лагранжа.**

Аналогично работает признак для ряда Маклорена. Но на практике чаще используется более удобный признак.

Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Если для любых $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$ **все производные функции** $f(x)$ **ограничены одной и той же константой** M **, то ряд Тейлора сходится к функции** $f(x)$ **в интервале** $|x - x_0| < R$.

7. Разложение элементарных функций в ряд

При представлении элементарной функции в виде ряда обычно поступают следующим образом:

– вычисляют последовательно производные данной функции в точке $x = a$;

– составляют ряд и определяют область сходимости полученного ряда.

В этой области ряд Тейлора (Маклорена) сходится к порождающей его функции $f(x)$, если только все значения $f(a)$, $f'(a)$, …, $f^{(n)}(a)$ получаются непосредственной подстановкой значения $x = a$ в выражения $f(x)$, $f'(x)$, …, $f^{(n)}(x)$.

Получим разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

.

1) Функция вида $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Действительно,

f(x)=e^x*; f'(x)=*e^x*; f''(x)=*e^x*; f'''(x)=*e^x*;…*

f(0)=e^0*=1; f'(0)=*e^0*=1; f''(0)=*1*; f'''(0)=*1*;…*

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем соответствующие разложения.

Определим радиус сходимости полученного ряда по признаку Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)} = 0 \qquad ,$$

следовательно, $R = \infty$. Тогда интервал сходимости полученного ряда $(-\infty, +\infty)$.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию ***f(x)=***e^{5x}**.**

Решение:

$$e^{5x} = 1 + \frac{5x}{1!} + \frac{5^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{5^nx^n}{n!} + \ldots$$

Пример 2. Разложить функцию ***f(x)=***e^{5x} *в* ряд Тейлора по степеням ***(x-2).***

Решение:

$$e^{5x}=e^{(5(x-2))}*e^{10}=e^{10}*e^{(5(x-2))}=e^{10}*(1+5(x-2)/1!+(5^2(x-2)^2)/2!+\ldots+\frac{5^n(x-2)^n}{n!}+\ldots$$

2) Функция вида $f(x)=\sin x$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Действительно, *f(x)=*$\sin x$*; f'(x)=*$\cos x$*; f''(x)=-*$\sin x$*; f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=0; f'''(0)=-1;…*

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем искомое значение.

Определим радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)-1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{(2n-1)}=\infty$$

Тогда $(-\infty,+\infty)$ – интервал сходимости полученного ряда.

3) Функция вида $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Так же, как и в случае с функцией $\sin x$, интервал сходимости ряда $(-\infty,+\infty)$.

Кроме того, данное разложение можно получить из разложения функции $\sin x$ почленным дифференцированием.

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \cos 2x$

Решение:

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

4) Функция вида $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots +$$

$$+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ на $(-1;\,1]$.

5) Функция вида $f(x) = (1+x)^m$

Биноминальный ряд сходится внутри интервала $-1 < x < 1$ и расходится вне этого интервала. Сходимость для значений $x = 1$ и $x = -1$ исследуется для каждого случая отдельно.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 +$$

$$+ \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

6) Функция вида $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ на } (-1;\, 1).$$

Для разложения функции в ряд Тейлора (Маклорена) можно использовать известные разложения в ряд. При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их промежутков сходимости:

– два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов);

– степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель;

– степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Так как степенной ряд для своей суммы есть ряд Тейлора, то полученное в результате указанных действий разложение будет искомым.

8. Приложения степенных рядов

8.1. Приближённое вычисление значений функции

Задача. Найти приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной степенью точности ε.

Решение. Разложим функцию $f(x)$ в ряд по степеням $(x - x_1)$ с интервалом сходимости, содержащим точку x_0, где x_1 – точка, в которой значения функции, а также её производных легко вычисляются, давая точные значения.

Переменной x даем значение x_0 и в числовом ряду

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$ оставим только те члены, которые гарантируют заданную точность.

Число таких членов определяется по правилу:

– если ряд знакоположительный, то с помощью остаточного члена $R_n(x_0)$ формулы Тейлора $R_n(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x_0^{n+1}$, $\zeta \in (x_0,\ x)$

– если ряд знакочередующийся, то с помощью остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора $\left| r_n(x_0) \right| \le u_{n+1}(x_0)$.

Пример. Вычислить $\sin 20^0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Имеем $20^0 = \dfrac{180^0}{9} = \dfrac{\pi}{9}$ и

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ – знакочередующийся ряд, значит, применим остаток ряда Маклорена.

$\left| r_n(x_0) \right| \le u_{n+1}(x_0)$, $x = \dfrac{\pi}{9}$,

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \le 0{,}0001, \quad \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le 0{,}0001.$$

Подбором, при значении $n=1$ получим $0,00004 \le 0,0001$ – условие выполняется. Тогда,

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{729\cdot 6} \approx 0,34181.$$

Пример. Вычислить $\ln 0,8$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. Для вычисления $\ln 0,8$ запишем ряд

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \ +(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$. При $x = -0,2$, входящем в область сходимости ряда $(-1;\ 1]$:

$$\ln 0,8 = -0,2 - \frac{0,2^2}{2} - \frac{0,2^3}{3} - \ldots - \frac{0,2^n}{n} - \ldots =$$
$$= -(0,2 + 0,02 + 0,00266 + 0,0004 + \ldots).$$

Если в качестве $\ln 0,8$ взять первые четыре члена, мы допустим погрешность

$$|r_n| = \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{6} + \ldots + \frac{0,2^n}{n} + \ldots < \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{6} + \ldots \frac{0,2^n}{5} + \ldots = \frac{0,2^5}{5} \cdot \frac{1}{(1-0,2)} =$$
$$= 0,00008 < 0,0001.$$

$$\ln 0,8 \approx -(0,2 + 0,02 + 0,00266 + 0,0004) =$$

Итак, $= -0,22306 \approx -0,2231$.

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{36}$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. Представим $\sqrt[5]{36}$ в виде $\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$. Так как $x = \frac{1}{8}$ входит в область сходимости степенного ряда $(-1;1)$, то при значениях $x = \frac{1}{8}$, $m = \frac{1}{5}$, учитывая, что

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

получим:

$$\sqrt[5]{36} = 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{1}{8^n}+\ldots\right)=$$

$$= 2+0,05-0,0025+0,000188-0,000016+\ldots\approx 2,0477$$

.

Для обеспечения данной точности расчета необходимо взять 4 члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность $|r_n| \le 0,000016 < 0,0001$.

8.2. Приближённое вычисление определённых интегралов

Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов. Отрезок интегрирования должен находиться внутри интервала сходимости ряда.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, $x \in R$,

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$,

отсюда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{600} \cdot \frac{1}{32} - \ldots.$$

Вычисляя члены этого ряда с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, замечаем, что третий член ряда по абсолютной величине меньше $0{,}001$. Следовательно, для решения этой задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых двух членов, что обеспечит требуемую точность

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 0{,}5 - 0{,}0069 \approx 0{,}4931.$$

8.3. Приближённое решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не удаётся найти в элементарных функциях, то для их решения можно применять степенные ряды.

Пример. Найти первые три (отличные от нуля) члена разложения в ряд Маклорена функции $y(x)$, являющейся частным решением дифференциального уравнения $y' = x + x^2 - y^2 + \cos x$, если $y(0) = 1$.

Решение. Положим, что $y(x)$ является решением данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Если $y(x)$ допускает разложение в ряд Маклорена, то имеем

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots.$$

Свободный член разложения, т. е. $y(0)$, дан по условию. Чтобы найти значения $y'(0),\ y''(0),\ y'''(0)\dots$, можно данное уравнение последовательно дифференцировать по переменной x и затем вычислить значения производных при величине $x = 0$.

Значение $y'(0)$ получаем, подставив начальные условия в данное уравнение: $y'(0) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$, т. е. $y'(0) = 0$.

$y'' = 1 + 2x - 2yy' - \sin x$,

$y''(0) = 1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 0 - 0 = 1$, т. е. $y''(0) = 1$.

$y''' = 0 + 2 - 2(y')^2 - 2yy'' - \cos x$,

$y'''(0) = 0 + 2 - 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1 = -1$, т. е. $y'''(0) = -1$, …

Подставив найденные значения производных при значении $x = 0$ в ряд $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$, получим разложение искомого частного решения уравнения в ряд:

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \dots.$$

Окончательно, $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots.$